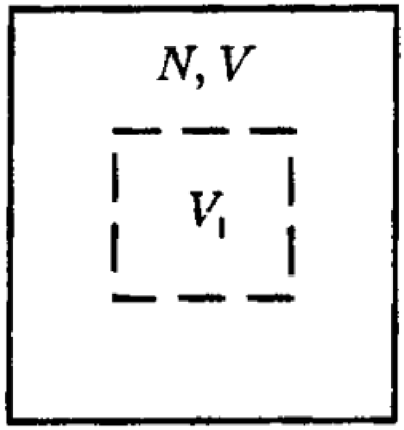
Итак, поехали!

Задача 2. **Идеальный равновесный пространственно однородный классический газ из N частиц находится в объеме V (рис. 13). Найти абсолютную и относительную флуктуации числа частиц в некоторой части сосуда V_1 ($V_1 < V$).**



Тут надо сразу сообразить, что у нас биномиальное распределение. Или он попал, или он не попал в объём V1 – как говорится, «пациент или жив, или мёртв». Вероятность попасть в объём N1 есть $p = \frac{V_1}{V}$, а вероятность не попасть – $q = 1 - \frac{V_1}{V}$ Тогда

$$f(N_1) = C_N^{N_1}\left(\frac{V_1}{V}\right)^{N_1}\left(1 - \frac{V_1}{V}\right)^{N-N_1}$$

Где f – вероятность встретить N_1 частиц в объёме V_1.

Чего от нас хотят? Флуктуацию, т.е. погрешность, т.е. корень из дисперсии. Тут стоит сослаться на готовый результат для биномиального распределения, у которого дисперсия является Npq:

$$\text{Дисперсия} = Npq = N\left(\frac{V_1}{V}\right)\left(1 - \frac{V_1}{V}\right)$$

$$\text{Флуктуация} = \sqrt{Npq} = \sqrt{N\left(\frac{V_1}{V}\right)\left(1 - \frac{V_1}{V}\right)}$$

Если от вас потребуют вывод, то говорите, что его нет даже в Квасникове (потому что он был уже и на молекуле, и на теорвере, и на матстате).

Это была абсолютная флуктуация. Чтобы получить относительную, нужно поделить на среднее число частиц в объёмчике:

$$\text{Относительная флуктуация} = \frac{\sqrt{N\left(\frac{V_1}{V}\right)\left(1 - \frac{V_1}{V}\right)}}{N_1(\text{т. е.}\, N * \frac{V_1}{V})} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{V_1}{V}\right)}{N\left(\frac{V_1}{V}\right)}}$$

Задача 5:

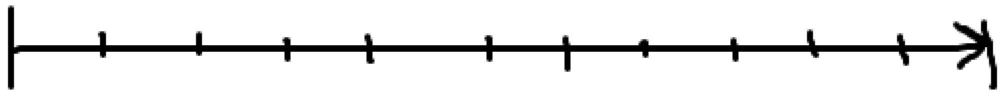
Задача 6. Оценить флуктуации тока термоэмиссии за время t, если известно его среднее значение $I = ej$. Вылеты электронов из катода можно считать независимыми друг от друга, а вероятность отдельного вылета за время $\tau \to 0'$ — пропорциональным этому интервалу времени.

Это формулировка задачи из Квасникова и она отвратительна. Сейчас, к счастью, её уже переработали:

(5) Полагая вылеты отдельных электронов из катода независимыми друг от друга, а вероятность отдельных вылетов за малый интервал времени τ пропорциональной τ, показать, что дисперсия полного заряда, испущенного с катода за время t, равна eIt, где I - средний ток эмиссии.

Тут надо понять, что происходит. У нас есть катод и анод, мы подаём на них напряжение – ровно на конечное время t. За это время часть электронов перебегут с катода на анод. Нам известно t и средний ток I, так что среднее число заряда – It. А вот с нас спрашивают дисперсию этого заряда – собранного за время t.

Давайте разобьём промежуток по времени на интервалы длиной Δt, которые очень-очень малы:



В каждый момент времени Δt вероятность утечки с катода бесконечно мала, но и промежутков Δt бесконечно много – а это в чистом виде распределение Пуассона: мы очень много раз играем в очень маловероятную лотерею: в каждом из них один электрон с катода может бежать, вероятность этого очень мала (так как Δt мало), но зато и таких кусочков очень много.

Всё, получили, что это Пуассона, а теперь давайте это использовать. У распределения Пуассона один параметр – матожидание λ. Это среднее матожидание числа электронов, покинувших катод за наш эксперимент. Это $\frac{It}{e}$ (проверьте, что это величина безразмерна).
Но оно же (т.к. у нас Пуассон) есть дисперсия. Т.е. дисперсия числа электронов, сваливших с катода – тоже $\frac{It}{e}$.

С нас, однако, спрашивали чутка другую дисперсию – дисперсию заряда, а не числа электронов. Т.к. каждый электрон несёт заряд e, то получаем дисперсию $e^2 * \frac{It}{e} = eIt.$

Кстати, хочу поделиться решением Сергея Дмитриевича Мостового. Привожу его ниже. Это им же собственноручно сделанный конспект. Может, оно вам понравится больше.

(5) Полагая вылеты отдельных электронов из катода независимыми друг от друга, а вероятность отдельных вылетов за малый интервал времени τ пропорциональной τ, показать, что дисперсия полного заряда, испущенного с катода за время t, равна eIt, где I - средний ток эмиссии.

Используем следующую схему испытаний. Разобьем все время эксперимента t на N интервалов величиной $\tau = t/N$ и будем полагать вероятность вылета электрона в течение малого интервала одинаковой при любом испытании. Также будем считать событие вылета двух электронов в течение малого интервала маловероятным.

Таким образом, с учетом независимости событий в каждой паре «испытаний», мы получаем схему Бернулли (N испытаний; в каждом: вероятность p вылета электрона в течение времени τ и вероятность $q = 1 - p$ отсутствия частицы).

Задаем силу тока, измеренную за все время эксперимента, выражением $I_t = ne/t$, где n – количество зарегистрированных электронов. В терминах биномиального распределения n равно числу «успехов» в серии N испытаний. Вычислим среднее и дисперсию:

$$\overline{I_t} = \frac{\overline{n}e}{t} = \frac{pNe}{t}, \qquad \overline{(\Delta I_t)^2} \equiv D\left[\frac{ne}{t}\right] = \left(\frac{e}{t}\right)^2 Dn = \left(\frac{e}{t}\right)^2 Npq; \qquad \frac{\overline{(\Delta I_t)^2}}{\overline{I_t}^2} = \frac{q}{Np}.$$

Последнее выражение обладает существенным недостатком – содержит нефизический параметр N. **Подправим** расчет. Совершим предельный переход $N \to \infty$ при условии постоянства средней силы тока, что соответствует измельчению разбиения полного времени эксперимента

$$\overline{I} = n_1 e = \frac{ne}{t} = \text{const},$$

где n_1 – *среднее* число электронов, вылетающих в единицу времени. Это позволяет определить величину вероятности p успеха в одном эксперименте:

$$n_1 = \frac{n}{t} = \frac{pN}{t} \Rightarrow p = \frac{n_1 t}{N} = n_1 \tau.$$

Таким образом,

$$\overline{(\Delta I)^2} = \left(\frac{e}{t}\right)^2 Npq = \left(\frac{e}{t}\right)^2 N \frac{n_1 t}{N}\left(1 - \frac{n_1 t}{N}\right) \xrightarrow{N\to\infty} \left(\frac{e}{t}\right)^2 n_1 t = \frac{e}{t} e n_1 = \frac{e\overline{I}}{t}.$$

Этот результат выглядит лучше полученного выше, поскольку

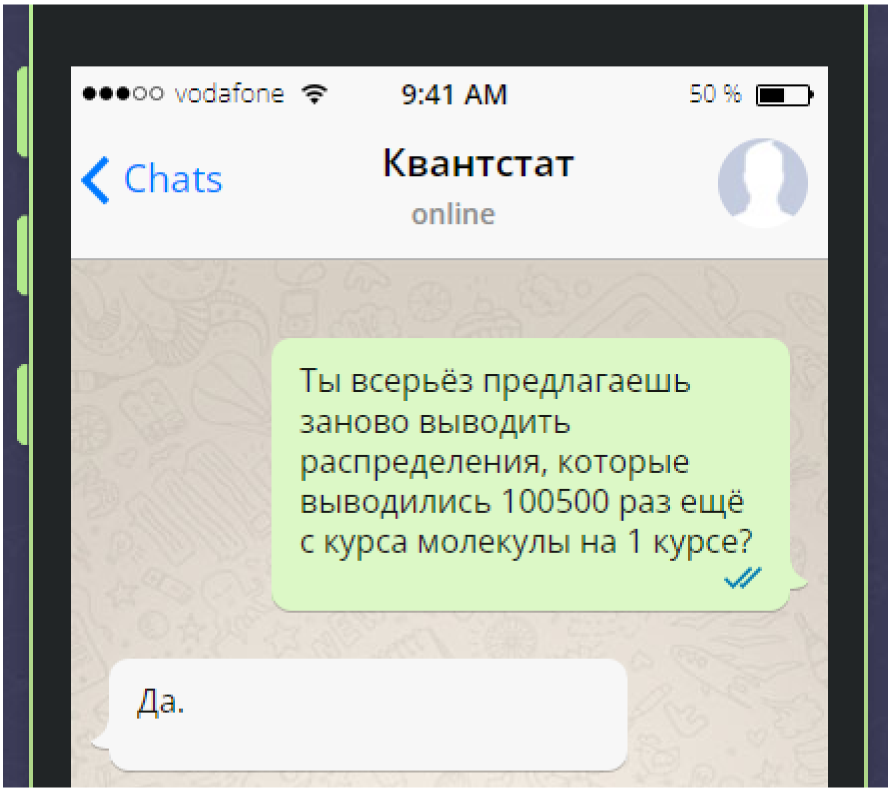
$$\frac{\overline{(\Delta I)^2}}{\overline{I}^2} = \frac{\frac{e\overline{I}}{t}}{\overline{I}^2} = \frac{e}{\overline{I}t}$$

не содержит N.

Между прочим, у нас есть ещё теорвопросы:

22. Для пространственно однородного классического газа вычислить среднее значение и относительную флуктуацию числа частиц N_1 в некоторой части сосуда объема V_1. Показать, что в пределе $N \to \infty$, $V \to \infty$, $V/N = v = \text{const}$, $V_1 = \text{const}$ это число подчиняется закону Пуассона.

23. Для пространственно однородного классического газа вычислить среднее значение и относительную флуктуацию числа частиц N_1 в некоторой части сосуда объема V_1. Показать, что отклонение $\Delta N_1 = N_1 - \overline{N_1}$ от среднего значения имеет порядок $\sqrt{N}$ и что в пределе $N \to \infty$, $V, V_1 \to \infty$, $V_1/V = \text{const}$ величина $\Delta N_1/\sqrt{N}$ подчиняется нормальному закону.



То, что там биномиальное распределение, мы уже доказали. Осталось сделать вывод то к Пуассону, то к Гауссу.

Вот вам вывод Пуассона из Вики:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} &\simeq \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^k+O\left(n^{k-1}\right)}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$$

Это оставляет

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \simeq \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

А вывод Гаусса от Мостового:

$$w(N_1) = C_N^{N_1} p^{N_1} q^{N-N_1}, \qquad \overline{N_1} = Np.$$

Рассмотрим

$$1 \ll N_1 \ll N, \qquad \left|N_1 - \overline{N_1}\right| \ll \overline{N_1}.$$

Таким образом, мы находимся в районе *пика* распределения, т.е., наиболее вероятных микросостояний.

$$w(N_1) = \frac{N!}{N_1!\,(N-N_1)!}\left(\frac{\overline{N_1}}{N}\right)^{N_1}\left(1-\frac{\overline{N_1}}{N}\right)^{N-N_1} \simeq \frac{\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N}{\sqrt{2\pi N_1}\left(\frac{N_1}{e}\right)^{N_1}\cdot\sqrt{2\pi(N-N_1)}\left(\frac{N-N_1}{e}\right)^{N-N_1}}.$$

$$\cdot\left(\frac{\overline{N_1}}{N}\right)^{N_1}\left(1-\frac{\overline{N_1}}{N}\right)^{N-N_1} = \frac{\sqrt{N}N^N}{\sqrt{2\pi N_1}N_1^{N_1}\cdot\sqrt{N}\sqrt{1-\underbrace{\frac{N_1}{N}}_{\to 0}}\,N^{N-N_1}\underbrace{\left(1-\frac{N_1}{N}\right)^{N-N_1}}_{e^{-N_1\cdot 1}}}\left(\frac{\overline{N_1}}{N}\right)^{N_1}\underbrace{\left(1-\frac{\overline{N_1}}{N}\right)^{N-N_1}}_{e^{-\overline{N_1}\cdot 1}} =$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi N_1}}\frac{1}{N_1^{N_1}}\left(\overline{N_1}\right)^{N_1}\frac{e^{-\overline{N_1}}}{e^{-N_1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_1}}\left(\frac{\overline{N_1}}{N_1}\right)^{N_1} e^{\Delta N_1}, \qquad \Delta N_1 = N_1 - \overline{N_1}.$$

Далее рассмотрим получившуюся дробь, предварительно отправив ее в показатель экспоненты:

$$\ln\left(\frac{\overline{N_1}}{N_1}\right)^{N_1} = \left(\overline{N_1}+\Delta N_1\right)\ln\frac{\overline{N_1}}{\overline{N_1}+\Delta N_1} = -\left(\overline{N_1}+\Delta N_1\right)\ln\left(1+\frac{\Delta N_1}{\overline{N_1}}\right).$$

Раскроем скобки и применим разложение логарифмов в ряд так, чтобы не превысить второй порядок по ΔN_1 (требуется разложение логарифма до 2ого порядка в первом слагаемом и до 1ого порядка – во втором):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots,$$

$$\ln\left(\frac{\overline{N_1}}{N_1}\right)^{N_1} \simeq -\overline{N_1}\left(\frac{\Delta N_1}{\overline{N_1}} - \frac{(\Delta N_1)^2}{2\overline{N_1}^2}\right) - \Delta N_1\frac{\Delta N_1}{\overline{N_1}} = -\Delta N_1 - \frac{(\Delta N_1)^2}{2\overline{N_1}}.$$

Подставим промежуточный результат в исходную формулу:

$$w(N_1) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi N_1}}e^{-\frac{(\Delta N_1)^2}{2\overline{N_1}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{N_1}}\sqrt{1+\underbrace{\frac{\Delta N_1}{\overline{N_1}}}_{\to 0}}}e^{-\frac{(\Delta N_1)^2}{2\overline{N_1}}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{N_1}}}e^{-\frac{(\Delta N_1)^2}{2\overline{N_1}}}.$$

Мы получили распределение Гаусса (нормальное) для случайной величины числа N_1 частиц в выделенном воображаемом объеме V_1 газа с параметрами – средним $\overline{N_1} \equiv \mathcal{N}_1$ и такой же дисперсией.